ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL
PROGRAMA DEL DIPLOMA

MONOGRAFÍA EN MATEMÁTICAS

Los Números Surreales como Anillo Unitario Conmutativo

¿En qué medida el sistema algebraico de los números surreales se puede considerar como anillo unitario conmutativo?

NÚMERO DE PALABRAS: 3975

Noviembre 2020

Índice

1. Introducción

El presente trabajo se centra en el área del álgebra abstracta para estudiar el conjunto de los números surreales (**No**) y, a través de métodos de demostración lógica como la reducción al absurdo probar su inclusión dentro de la definición de ***anillo unitario conmutativo***. Dentro del álgebra abstracta, existen estructuras algebraicas que deben su definición a las propiedades que tienen los conjuntos. En ese sentido, el objetivo del trabajo es demostrar las propiedades necesarias para que **No** sean clasificados como ***anillo unitario conmutativo***. Por tanto, la monografía busca responder a la pregunta; ¿en qué medida el sistema algebraico de los números surreales se puede considerar como anillo unitario conmutativo?

Primero, se definieron propiedades básicas de **No**, utilizando como principal referencia la investigación de Grimm (2020). Segundo, se definió la adición dentro del conjunto y se demostraron las siguientes propiedades referentes: la clausura, asociatividad, existencia de neutro, existencia de inverso y la conmutatividad. Tercero, se definió la multiplicación y se demostraron propiedades de clausura, asociatividad y distributividad con la adición. Hasta ese punto se demostró que **No** tiene ***estructura de anillo***. Por último, se demostraron los teoremas de existencia de neutro y conmutatividad en el producto para comprobar que **No** es un ***anillo unitario conmutativo***.

La principal aplicación de los números surreales radica en el análisis no estándar y en la teoría de juegos combinatorios, que fueron mi motivo de interés para el desarrollo de la monografía. Los números infinitesimales tales como ω y ε surgen naturalmente dentro de **No**, por lo que el desarrollo de las propiedades del sistema contribuye al desarrollo del análisis no estándar. En el libro *On numbers and games*, Jhon Conway presenta la aplicación de los surreales en juegos combinatorios como el ajedrez o las damas. En tal caso, su igual desarrollo supone una contribución para esa área de las matemáticas.

2. Marco Teórico

2.1. Teoría de Anillos

Dentro del algebra abstracta existen estructuras matemáticas que deben su definición a las propiedades que posean los elementos de un conjunto. ‘‘Las propiedades elementales de los anillos son análogas a las de $\mathbb{Z}$’’ (Ayres, 1992, p.102). Esto implica que los anillos tienen circunscritos dos operaciones: suma y producto, que poseen las propiedades mostradas a continuación.

Definición 1 (Definición de Anillo): ‘‘Se denomina anillo a todo sistema $(A, +, \cdot)$ formado por un conjunto A y dos leyes de composición clausurativas en A, $(+)$ y $(\cdot)$ denominadas respectivamente la adición y la multiplicación del anillo, las cuales cumplen las siguientes condiciones’’ (Castañeda, 2013, p.17).

Axiomas de la adición

1.° $\forall a, b \in A$: $(a+b) \in A$	Clausura
2.° $\forall a, b, c \in A$: $(a+b)+c = a+(b+c)$	Asociatividad
3.° $\forall a \in A$ $\exists! \, b \in A$: $a+b = b+a = a$	Existencia de elemento neutro
4.° $\forall a \in A$ $\exists (-a) \in A$: $a+(-a) = (-a)+a = 0$	Existencia de inverso
5.° $\forall a, b \in A$: $a+b = b+a$	Conmutatividad

Axiomas de la multiplicación

1.° $\forall a, b \in A$: $a.\, b \in A$	Clausura
2.° $\forall a, b, c \in A$: $(a.\, b).\, c = a.(b.\, c)$	Asociatividad

Axiomas que relacionan las dos leyes

1.° $\forall a, b, c \in A$: $a.(b+c) = a.\, b + a.\, c$ Distributividad

2.° $\forall a, b, c \in A$: $(b+c).\, a = b.\, a + c.\, a$

(Burgos, 1978)

Al cumplirse los axiomas para la adición, se define al conjunto A como un grupo con una operación que: es cerrada, conmutativa, asociativa, existe un elemento neutro, y existe inverso. Para ser anillo, es necesario que dos operaciones estén definidas. Por ello, se deben cumplir las propiedades de clausura y asociatividad para la multiplicación. A su vez, ambas operaciones deben relacionarse distributivamente. Entonces, se afirma que A tiene ***estructura de anillo***. Las propiedades de clausura y asociatividad para el producto bastan para considerar a un conjunto A como anillo, pues es el acercamiento estructural más básico a $\mathbb{Z}$. En ese sentido, con otras propiedades para la segunda operación, la definición de anillo se vuelve más específica.

Hasta este punto se conoce la definición más básica de anillo. Es posible que un conjunto A, que posea todas las propiedades ya mencionadas, tenga también otras que permiten darle una clasificación más específica, de modo que se asemeje más a la estructura de $\mathbb{Z}$.

Otros axiomas de la multiplicación

3.° $\forall a \in A\ \exists!\, b \in A$: $a.\, b = b.\, a = a$ Existencia de elemento neutro

4.° $\forall a, b \in A$: $a.\, b = b.\, a$ Conmutatividad

Si se solo demuestra 3.° (incluyendo las propiedades anteriores), el anillo es ***unitario***, pues existe un elemento neutro definido dentro del anillo A para el producto. Si se verifica solo 4.°, entonces el anillo es ***conmutativo***, pues la propiedad conmutativa se demuestra igualmente para la multiplicación. Al verificarse ambas, el anillo es ***unitario conmutativo***.

(Burgos, 1978)

2.2. Prueba por contradicción

La prueba por contradicción o *reducción al absurdo* es un método lógico utilizado en matemáticas para demostrar la validez de proposiciones. Según Almanza (2010), el método consiste en suponer como falsa la tesis que se intenta validar y ver si ello supone una contradicción, si así ocurre, la tesis es verdadera.

En lógica, se les conoce como premisas a aquellos argumentos que permiten llegar a una conclusión general sobre una situación. A continuación, se muestra un ejemplo:

$$(\overbrace{p \wedge q}^{Premisa}) \to \overbrace{r}^{Conclusión}$$

La premisa que se tiene en esta proposición es "p y q" y la conclusión es directamente r. Se lee como "si es p y q entonces r". Para demostrar que la conclusión r es válida, esta se negara y se intercambiará con la premisa q. Por tanto:

$$(p \wedge \sim r) \to \sim q$$

La simbología $\sim$ significa la negación de una proposición. Se interpreta como "si es p y no r, entonces no q". Según la ley lógica presentada por Venero (1995), $p \to q \equiv (\sim p) \vee q$, donde $\vee$ significa la disyunción de proposiciones. Esto se lee, como "p entonces q es equivalente a no p o q". Se puede simplificar la expresión de arriba modo que:

$$\sim(p \wedge \sim r) \vee \sim q$$

Por la propiedad distributiva, se distribuye la negación en $\sim(p \wedge \sim r)$ de manera que:

$$\sim p \wedge \sim\sim r \vee \sim q$$

$$\sim p \wedge r \vee \sim q$$

Nótese que la negación de la negación de r implica la afirmación r. Ahora se puede aplicar la ley de D'Morgan,Venero (1995): $(\sim p) \vee (\sim q) \equiv \sim(p \wedge q)$. Al aplicar la ley, se obtiene que:

$$\sim(p \wedge q) \vee r$$

Ahora se puede volver a aplicar la propiedad de Venero (1995), $(\sim p) \vee q \equiv p \rightarrow q$. Nótese que se está negando $\sim(p \wedge q)$ y hay una disyunción r.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Nótese que se ha demostrado que la validez de la conclusión a la que se había llegado en un principio, a través del método de reducción al absurdo. Se puede llegar a la misma conclusión de forma directa (con inferencias y leyes matemáticas) o indirecta (reducción al absurdo),

2.3. Los Números Surreales (Propiedades y Demostraciones)

Los números surreales son sistema algebraico expresado como **No**. Un numero surreal a se expresa de la forma $a = \{A_L \mid A_R\}$. Los elementos a_L y a_R de estos conjuntos deben regirse bajo dos axiomas fundamentales que permiten la existencia lógica de los números surreales.

Axioma 1: "Cada número corresponde de dos conjuntos numéricos previamente creados, tal que ningún elemento en la izquierda es mayor o igual que algún número del conjunto derecho" (Knuth. 1974).

Entonces, si $a = \{A_L \mid A_R\}$, para cada $a_L \in A_L$ y $a_R \in A_R$, $a_L \ngeq a_R$. Esto se expresa como $A_L \ngeq A_R$.

Ejemplo: $\{0 \mid 1\}$; $0 \ngtr 1 \therefore \{0 \mid 1\} \in$ **No**

Axioma 2: "Un número es considerado menor o igual que otro si y solo si ningún elemento del conjunto de la izquierda es mayor o igual que el conjunto de la derecha, y ningún miembro de este es menor o igual que el primer conjunto" (Knuth. 1974).

Entonces, si se define un $a = \{A_L | A_R\}$ y un $b = \{B_L | B_R\}$, $a < b \Longleftrightarrow A_L \ngeq b$, y $a \ngeq B_R$.

Ejemplo: $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2} \wedge \{2 \mid 3\} = \frac{5}{2}$

$$0 \ngtr \frac{5}{2} \wedge \frac{1}{2} \ngtr 3$$

Se comprenden los conjuntos A_L y A_R como valores a la izquierda y derecha de a que limitan este a una distancia simétrica. En otras palabras, A_L representa el extremo izquierdo y A_R el extremo derecho, donde su punto medio, es a.

Ejemplo: $\{0|1\} = \frac{1}{2}$; $\{-1|0\} = -\frac{1}{2}$; $\{\frac{3}{2}|\frac{7}{2}\} = \frac{5}{4}$

Nótese que al expresar $\frac{1}{2}$ se utilizan dos conjuntos unitarios de números a la izquierda y la derecha; cuya distancia de $\frac{1}{2}$ es la misma. Esto se cumple para los otros números mostrados en el ejemplo. A continuación, se muestra un diagrama donde se muestra gráficamente esta idea.

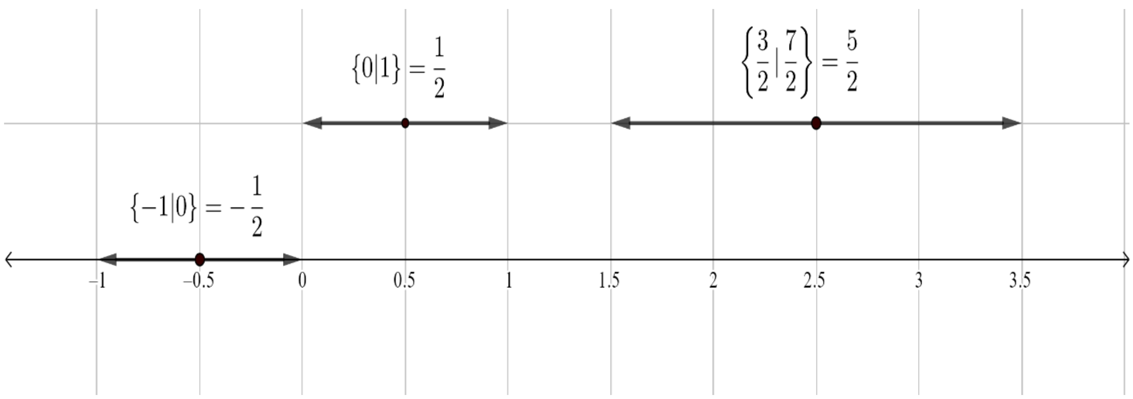

Figura 1: Recta numérica representativa

Los conjuntos A_L y A_R pueden tener más de un elemento. Se puede dar el caso que ambos o solo uno de los conjuntos sea una sucesión de elementos que converja hacia el número expresado.

Ejemplo: $5 = \{1, 2, 3, 4|6\}; 2 = \{0|4, 6\}$; $\frac{5}{2} = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2|3\}$

Un mismo número surreal se puede expresar de diferentes formas. En otras palabras, existen diferentes expresiones equivalen a un mismo valor. Ejemplificando, la expresión $5 =$

$\{1,2,3,4|6\} \equiv \{0|10\} \equiv \{\frac{7}{2}|\frac{11}{2}\}$. Estas equivalencias se sostienen por el teorema de simplicidad, que se demuestra más adelanta.

A_L, A_R también pueden ser conjuntos vacíos. Utilizando el ejemplo anterior, 5 puede expresarse de dos formas utilizando una sucesión de números como elementos $a_L \in A_L$ o $a_R \in A_R$ que converjan lógicamente hacia este.

$$5 = \{1,2,3,4|\emptyset\} \equiv \{\emptyset|6,7,8,9\}$$

Según el axioma 1, los números se crean a partir de otros previamente creados, es decir que hay un orden para la construcción de estos. A esto se le conoce como el orden de creación de los números. Se expresa S_x siendo x el conteo que transcurre hasta la construcción de números cualesquiera.

Al construir números a través de esta notación, no se puede crear ningún número cuyos A_L y A_R sean conjuntos preexistentes, pues no se ha creado ningún numero todavía. Entonces, ambos son conjuntos vacíos, y esta expresión es cero. En el orden S_1 solo se ha podido crear el numero cero, el cual se expresaría como $0 = \{\emptyset|\emptyset\}$.

Entonces es posible crear números que acaten el Axioma 2 en S_2, tales como $1 = \{0|\emptyset\}$ y $-1 = \{\emptyset|0\}$.

Análogamente, es posible crear todos los números surreales en ordenes posteriores.

S_1: $[\{\emptyset|\emptyset\}]$

S_2: $[\{0|\emptyset\};\ \{\emptyset|0\}]$

S_3: $[\{0|1\};\ \{-1|0\};\ \{1|\emptyset\};\ \{\emptyset|-1\}]$

S_x: $[\{A_L \,|\, A_R\}$; $\{B_L \,|\, B_R\}$; $\{C_L|C_R\}$; $\{D_L|D_R\}...]$

Definición 2: "Un número a es más simple que b si a fue creado en algún orden anterior de b" (Grimm, 2012).

Ejemplo: 0 es más simple que 1 y -1 pues este fue creado un orden antes.

Es posible expresar números irracionales, a través de sucesiones infinitas de números racionales en los conjuntos A_L o A_R.

Ejemplo:

$$\pi = \left\{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000} \cdots \middle| \emptyset\right\}$$

A su vez, surgen números infinitesimales como resultado de una infinita sucesión de números reales.

Ejemplo:

$$\omega = \{\mathbb{N}|\emptyset\} \equiv \{1, 2, 3, 4 \ldots |\emptyset\}$$

$$\varepsilon = \left\{0 \middle| 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24} \cdots\right\}$$

Como **No** es un sistema algebraico con dos axiomas bien definidos, es necesario plantear propiedades básicas para los elementos del conjunto. Esto permitirá demostrar teoremas más complejos más adelante.

Teorema 1 (Ley Transitiva): Si $\{a, b, c\} \in$ **No** tales que $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Demostración 1: Sean $a = \{A_L|A_R\}$, $b = \{B_L|B_R\}$ y $c = \{C_L|C_R\}$ los primeros números creados en los que $a \leq b$, $b \leq c$ y $a \nleq c$ se cumple. Entonces uno de los siguientes dos casos debería darse necesariamente.

i.) Existe un $a_L \in A_L$ tal que $a_L \geq c$.

ii.) Existe algún $c_R \in C_R$ de forma que $c_R \leq a$.

(Grimm, 2012).

En i.), los números b, c y a_L no están en regidos por la ley transitiva, y lo mismo sería en el caso ii.) para c_R, a y b. Nótese que los números a_L y c_R son más simples que a y c pues ambos pertenecen a A_L y C_R respectivamente. Estos números deben estar construidos por otros que tampoco cumplan la ley transitiva. Continuar creando números más simples que no cumplan la ley transitiva conllevaría al orden S_1 y S_2, donde se crearon $0, 1$ y -1. Estos números si cumplen la ley transitiva y es contradictorio que de números que si cumplen la propiedad se formen otros que no. Consecuentemente, se puede afirmar que tales a_L y c_R no existen por lo que se demuestra la transitividad.

Teorema 2: $\forall a \in \mathbf{No} \Rightarrow A_L \leq a \leq A_R$

Demostración 2: Si se supone que algún $a_L \in A_L$ de tal forma que $a_L \nleq a$. Entonces existe un numero $a_{LL} \in A_{LL}$ tal que $a_{LL} \geq a$ o existe algún $a_R \in A_R$ donde $a_R \leq a_L$. Esto es contradictorio por el axioma 1, y por la ley transitiva, se tendría que $a \leq a_L$. Esto es imposible pues $A_L \ngeq a_L$ al $a_L \in A_L$, entonces se demuestra $A_L \leq a$. Se puede demostrar que $a \leq A_R$ análogamente

(Grimm, 2012).

Teorema 3: $\forall a, b \in \mathbf{No}$: $b \nleq a \Rightarrow a \leq b$.

Demostración 3: Se supone que $b \nleq a$ y $a \nleq b$. Entonces alguno de los siguientes casos debería ser verdad.

iii.) $a_L \geq b$

iv.) $a \geq b_R$

Para el caso iii.) se sabe que $a_L \leq a$, entonces por la ley transitiva $b \leq a$. Sin embargo, se había asumido que $b \nleq a$ por lo que existe una contradicción. Esto se comprueba de forma similar en iv.).

(Grimm, 2012).

El Teorema 3 indica que los números surreales son ordenados, por lo que se puede plantear un corolario acerca de cómo un número se relaciona con sus conjuntos de la izquierda y derecha.

Corolario 1: Si $a \in \mathbf{No} \Rightarrow A_L < a < A_R$. (Grimm, 2012).

Teorema 4 (Teorema de Simplicidad): Dado un numero $b = \{B_L | B_R\}$, tal que a sea el primer número creado que $B_L < a < B_R$. Por lo tanto, $a \leq b$ y $b \geq a$. Entonces $a \equiv b$.

Demostración 4: Se plantea la existencia de un numero c de tal forma que $c = \{A_L \cup B_L | A_R \cup B_R\}$. Es demostrable que $a \equiv c$ comprobando que $a \leq c$ y $b \geq c$. Se conoce que $A_L < a$ y $B_L < a$. En consecuencia $A_L \cup B_L < a$. Se había definido c de modo que $c < A_R \cup B_R$, en tal caso debe ser que $c < A_R$, entonces $c \leq a$. Similarmente, es posible demostrar que $a \leq c$. Ergo, $a \equiv c$. Al demostrar que $b \equiv c$, por la ley transitiva, $a \equiv b$. Para ello, se debe comprobar que $B_L < c$ y $b < C_R$. Ya se había planteado que $B_L < a$, siguiendo la ley transitiva, $B_L < c$. Si $b < B_R$, entonces $b < C_R$, puesto que $B_R \subseteq C_R$. Esto demuestra que $b \leq c$, y se puede comprobar $c \leq b$ análogamente. Rigiéndose por la ley transitiva, $a \equiv b$.

(Grimm, 2012).

3. Demostración de los Números Surreales como Anillo

3.1. El conjunto está cerrado bajo la adición

Corolario 2: $\forall a, b \in \mathbf{No} \Rightarrow a + b \in \mathbf{No}$

En primera instancia, es necesario definir la adición dentro de **No**. De acuerdo con el teorema 4:

$$A_L < a < A_R$$

$$B_L < b < B_R$$

Teniendo en cuenta esta relación, se pueden sumar ambos números resultando en otra inecuación.

$$A_L + b < a + b < A_R + b$$

$$B_L + a < b + a < B_R + a$$

Entonces, los elementos $A_L + b$ y $B_L + a \in (A+B)_{L.}$ Análogamente, los elementos del lado derecho de ambas inecuaciones serian elementos de $(A+B)_R$. Por lo tanto, la expresión $a + b$ sería:

$$a + b = \{A_L + b,\ B_L + a | A_R + b,\ B_R + a\}$$

Para que el enunciado sea correcto se deberían cumplir las siguientes inecuaciones para que el número $a + b$ respete el Axioma 1:

$$A_L + b < A_R + b$$

$$A_L + b < B_R + a$$

$$B_L + a < A_R + b$$

$$B_L + a < B_R + a$$

La validez de estas inecuaciones es sostenible por si misma si la adición es transitiva en **No**. Por lo tanto, se brindará una demostración para ello.

Teorema 6 (Ley transitiva para la adición): Si $a+c \leq b+c$, por lo tanto $a \leq b$.

Demostración: Las expresiones $a+c$ y $b+c$ (de acuerdo con la definición de adición anterior) serían:

$$a+c=\{A_L+c, C_L+a|A_R+c, C_R+a\}$$

$$b+c=\{B_L+c, C_L+b|B_R+c, C_R+b\}$$

Para la presunción de que $a+c \leq b+c$ sea correcta, deben cumplirse 4 inecuaciones para que $a+c$ y $b+c$ cumplan lo estipulado por el Axioma 2.

$$A_L+c<b+c$$

$$a+c<B_R+c$$

Se supone la existencia de un elemento $a_L \in A_L$ de tal forma que $a_L+c \geq b+c$, entonces $a_L \geq b$. Esto es contradictorio pues, $a_L \in A_L < a \leq b$. Por lo tanto, tal a_L no existe y la primera inecuación se mantiene. La demostración de la segunda inecuación es análoga, ahora se demostrarán los 2 restantes.

$$C_L+a<b+c$$

$$a+c<C_R+b$$

Se asumirá que la suma es conmutativa, propiedad demostrada posteriormente. Acorde con la primera inecuación, si se supone que $C_L+a>b+c$, se puede deducir que $a>(b+c)-C_L$. Si esto fuese cierto uno de los dos escenarios siguientes debería serlo también:

v.) $b+c<a$ y $C_L<b+c$

vi.) $b+c \geq a$, pero $C_L \geq b+c$.

v.) implica que $\{b, c\}<a$. Esto es contradictorio pues ya se había presupuesto que $a \leq b$, de esta manera se descarta. Para vi.), $C_L \geq b+c$. Si estuviese correcto, al remplazar C_L en c, en la inecuación $A_L+c<b+c$, que ya se demostró. En tal caso, $A_L+C_L>b+c$, lo que sería incorrecto pues se estaría diciendo que $C_L>c$. De esta forma, la inecuación $C_L+a<b+c$ se mantiene. Se puede demostrar que $a+c<C_R+b$ de manera análoga.

Ejemplo: $0 = \{\emptyset|\emptyset\}; 1 = \{0|\emptyset\}$

$$0 + 1 = \{\emptyset + 1,\ 0 + 0|\emptyset + 0,\ \emptyset + 0\}$$

$$\therefore 0 + 1 = \{0|\emptyset\} = 1$$

Nótese que ahora **No** es semejante a la adición en $\mathbb{Z}$, no solo en el sentido que la operación este definida, sino que la misma es transitiva. Eso es precisamente lo que se hace en el resto del trabajo, el demostrar propiedades que permitan a **No** asemejarse a la estructura de $\mathbb{Z}$.

3.2. La adición es conmutativa

Teorema 7: $\forall a, b \in \mathbf{No} \Rightarrow (a+b)=(b+a)$.

Demostración: $(a+b)$ y $(b+a)$ se expresan de la forma:

$$a + b = \{A_L + b,\ B_L + a | A_R + b,\ B_R + a\}$$

$$b + a = \{B_L + a,\ A_L + b | B_R + a,\ A_R + b\}$$

Ambas sumas son iguales, pues cada elemento de sus conjuntos de la izquierda y de la derecha así lo son. Por lo tanto, la adición es conmutativa en **No**.

Ejemplo: $1 = \{0|\emptyset\},\ 2 = \{1|\emptyset\}$,

$$1 + 2 = \{0 + 2,\ 1 + 1 | \emptyset + 2,\ \emptyset + 1\} = \{2|\emptyset\} = 3$$

$$2 + 1 = \{1 + 1,\ 0 + 2 | \emptyset + 1,\ \emptyset + 2\} = \{2|\emptyset\} = 3$$

$$\therefore 1 + 2 = 2 + 1$$

La propiedad conmutativa permite que $a + b = b + a$, tal cual ocurre en $\mathbb{Z}$. Los enteros y los números surreales ya comparten 3 propiedades con respecto a la adición, la transitividad, la conmutatividad y la clausura. No obstante, hasta este punto se pueden realizar operaciones, como la vista en el ejemplo de arriba, que sean análogas dentro de los enteros.

3.3. La adición es asociativa

Teorema 8: $\forall a, b, c \in$ **No** $\Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$.

Demostración: Se asume la conmutatividad de la adición y se expresa $(a+b)+c$.

$$(a+b)+c = \{A_L + b,\ B_L + a | A_R + b,\ B_R + a\} + c$$

$$(a+b)+c=$$

$$\{(A_L + b)+c,\ (\ B_L + a)+c,\ (a+b)+\ C_L | (A_R + b)+c,\ (B_R + a)+\ c,\ (a+b)+\ C_R\}$$

La expresión se puede factorizar, de forma que:

$$(a+b)+c=$$

$$\{A_L+(b+c),\ a+(B_L + c),\ a+(\ b + C_L) | A_R + (b+c),\ a+(B_R + c),\ a+(\ b + C_R)\}$$

$$(a+b)+c = a+\{(B_L + c),\ (b + C_L) | (\ B_R + c),\ (b + C_R)\}$$

$$\therefore (a+b)+c = a+(b+c)$$

Por lo tanto, la adición es asociativa en **No**.

Ejemplo: $1 = \{0|\emptyset\},\ 2 = \{1|\emptyset\},\ \frac{1}{2} = \{0|1\}$

$$1+2\ +\frac{1}{2} = \{0+2, 1+1|\emptyset+2,\ \emptyset+1\} + \frac{1}{2}$$

$$= \left\{\ 0+2\ +\tfrac{1}{2},\ \ 1+1\ +\tfrac{1}{2},\ 1+2\ +0 \right| \left. \emptyset+2\ +\tfrac{1}{2},\ \ \emptyset+1\ +\tfrac{1}{2},\ 1+2\ +1 \right\}$$

$$= \left\{0+\ 1+2\ ,\ 1+\left(1+\tfrac{1}{2}\right), 1+\ 2+0\ \right|\left.\emptyset+\ 1+2\ ,\ 1+\left(\emptyset+\tfrac{1}{2}\right), 1+\ 2+1\ \right\}$$

$$=\ 1+2\ +\frac{1}{2} = 1+\left\{1+\tfrac{1}{2}, 2+0 \right| \left. \emptyset+\tfrac{1}{2},\ 2+1\right\}$$

$$= 1+\left(2+\frac{1}{2}\right)$$

Al haber demostrado la asociatividad de la adición en **No**, ya se conoce que resultados de adiciones, como la vista en el ejemplo, son homónimas en $\mathbb{Z}$. El conjunto de los números surreales se continúa asemejando a los enteros.

3.4. La adición tiene elemento neutro

Teorema 9: Si $a + b = a$. Entonces b es un elemento neutro en **No** para la adición.

Demostración: Se expande la expresión $a + b = a$:

$$a + b = \{A_L + b,\ B_L + a | A_R + b,\ B_R + a\} = \{A_L | A_R\} = a$$

En este escenario, deberían cumplirse 4 igualdades de las que se demostraran primero 2, de forma que b sea un elemento neutro.

$$A_L + b = A_L$$

$$A_R + b = A_R$$

Se puede inducir que $b = 0 = \{\emptyset | \emptyset\}$, lo que tiene sentido, pues vuelve las 2 igualdades conjuntos vacíos, de forma que $a + b = \{A_L | A_R\}$ de forma que.

$$B_L + a = \emptyset + a = \emptyset$$

$$B_R + a = \emptyset + a = \emptyset$$

Por lo tanto, el elemento neutro para la adición en **No** es 0.

Ejemplo: $0 = \{\emptyset | \emptyset\}; 1 = \{0 | \emptyset\}$

$$0 + 1 = \{\emptyset + 1,\ 0 + 0 | \emptyset + 0,\ \emptyset + 0\}$$

$$0 + 1 = \{0 | \emptyset\} = 1$$

$$\therefore 0 + 1 = 1$$

El elemento neutro 0 en la adición en **No**, es de igual ocurrencia en $\mathbb{Z}$. Nótese que los números surreales van adquiriendo las mismas características algebraicas que los enteros. Operaciones como $a + 0 = a$ son equivalentes para ambos sistemas.

3.5. Existe un inverso aditivo para cada elemento del conjunto

Teorema 10: $\forall a \in$ **No** $\exists(-a)$: $a+(-a)\equiv 0$.

Demostración: En primer lugar, se debe definir $-a$ en función de a.

$$A_L < a < A_R$$

$$-A_R < -a < -A_L$$

Por lo tanto, $-a = \{-A_R|-A_L\}$, entonces:

$$A_L +(-a)< a +(-a)< A_R +(-a)$$

$$a +(-A_R)< a +(-a)< a +(-A_L)$$

Por el teorema de simplicidad se sabe que $a +(-a)\geq 0$ y $a +(-a)\leq 0$, por lo tanto:

$$A_L - a < 0 < A_R - a$$

$$a +(-A_R)< 0 < a +(-A_L)$$

Esto es así para que se mantenga que $(A-A)_L< 0 <(A-A)_R$. Por ello $a +(-a)$ se expresa de la forma:

$$a + (-a)=\{A_L + (-a),\ a +(-A_R)|A_R + (-a),\ a +(-A_L)\} \equiv 0$$

Entonces, las siguientes inecuaciones deben mantenerse:

$$A_L + (-a) < 0$$

$$A_R + (-a)> 0$$

$$a +(-A_R)< 0$$

$$a +(-A_L)> 0$$

Se plantea que existe un $a_L \in A_L$, de forma que $A_L + (-a)> 0$. Esto implicaría que $A_L + (-a)> a +(-a)$. Por la ley transitiva de la adición $A_L > a$, esto es incorrecto pues se sabe que $A_L < a$. Se pueden probar las otras 3 inecuaciones de manera análoga.

Ejemplo: $2 = \{1|\emptyset\}\,, \quad -2 = \{\emptyset|-1\}$

$$2-2 = \{1-2,\ 2-\emptyset|\emptyset-2,\ 2-1\}$$

$$2-2 = \{-1|1\} = 0$$

$$\therefore 2-2 = 0$$

La existencia de inverso es lo equivalente a mencionar los $\mathbb{Z}^-$. En ese sentido, se ha demostrado la existencia lógica de infinitos números negativos en **No,** es decir el subconjunto **No**$^-$. **No** continúa asemejándose a los enteros y por consiguiente, a la definición de anillo.

3.6. El conjunto está cerrado bajo el producto

Teorema 11: $\forall a, b \in \mathbf{No} \Rightarrow a.\, b \in \mathbf{No}$

Demostración: Se puede plantear una definición del producto análoga a la suma, del modo:

$$A_L.\, b < a.\, b < A_R.\, b$$

$$B_L.\, a < b.\, a < B_R.\, a$$

$$\therefore ab = \{A_L.\, b,\ B_L.\, a | A_R.\, b,\ B_R.\, a\}.$$

Esta definición tiene una falencia, no brinda resultados acertados para negativos. Por ejemplo, si definimos que $3 = \{2|\emptyset\}$ y $-1 = \{\emptyset|0\}$, se obtiene:

$$-3 =\{(2)(1),\, (\emptyset)(3)|(\emptyset)(-1),\, (0)(3)\}$$

$$-3 = \{2|0\}$$

$$-3 \neq \{2|0\}$$

El resultado no cumple el Axioma 1, por lo tanto, la definición de producto tampoco es correcta. Una definición acertada surge a partir del planteamiento del inverso aditivo donde se había demostrado que, $a - A_L > 0$, por lo tanto,

$$(a - A_L)(\ b - B_L) > 0$$

$$ab - aA_L - bA_L + A_L A_L > 0$$

$$ab > aA_L + bA_L - A_L A_L.$$

Del mismo modo, se puede inducir que:

$$(-a + A_R)(-b + B_R) > 0$$

$$ab - aB_R - bA_R + A_R B_R > 0$$

$$ab > aB_R + bA_R - A_R B_R.$$

Así pues, para la expresión de $(a - A_L)(\ b - B_R)$ se pude determinar que:

$$(a - A_L)(\ b - B_R) < 0$$

$$ab - aB_R - bA_L + A_L B_R < 0$$

$$ab < aB_R + bA_L - A_L B_R.$$

De igual forma para $(a - A_R)(\ b - B_L)$:

$$(a - A_R)(\ b - B_L) < 0$$

$$ab - aB_L - bA_R + A_R B_L < 0$$

$$ab < aB_L + bA_R - A_L B_L.$$

De esta forma, se puede definir el producto de dos elementos de **No** (a y b) a través de la siguiente expresión:

$$a.\, b = \ \{A_L.\, b + a.\, B_L - A_L.\, B_L, A_R.\, b + a.\, B_R - A_R.\, B_R$$
$$|A_L.\, b + a.\, B_R - A_L.\, B_R, A_R.\, b + a.\, B_L - A_R.\, B_L\}$$

Ya se conoce que la adición es transitiva, por lo que no es necesario demostrar las inecuaciones con las que se llegó a esta definición. Por lo tanto, se ha demostrado que el producto está definido en **No**.

Ejemplo: $-2 = \{-3|-1\}$ $\quad 6 = \{5|7\}$

$$(-2).(6)=\{(-3).(6)+(-2).(5)-(-3).(5),$$
$$(-1).(6)+(-2).(7)-(7).(-1)|(-3).(6)+(-2).(7)-(-3).(7),\ (-1).(6)+(-2).(5)-(-1).(5)\}$$

$$(-2).(6)= \{-13, -11\}$$

$$(-2).(6)= -12$$

La definición del producto supuso un acercamiento más grande a $\mathbb{Z}$, pues ahora se tienen 2 operaciones definidas en **No**. Ahora, en los números surreales pueden realizarse dos tipos de operaciones que, en teoría, deberían cumplir las mismas propiedades que la adición.

3.7. El producto es asociativo

Teorema 12: $\forall a,b,c \in \mathbf{No} \Rightarrow (a\ .b).\,c = a.(b\ .c)$

Demostración: De acuerdo con la definición de multiplicación,

$$(a.\,b)=\{A_L.\,b + a.\,B_L - A_L.\,B_L, A_R.\,b + a.\,B_R - A_R.\,B_R$$

$$|A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R, A_R.\,b + a.\,B_L - A_R.\,B_L\},$$

se puede plasmar $(a\ .b).\,c$, de forma que:

$$(a\ .b).\,c = \ \{A_L.\,b + a.\,B_L - A_L.\,B_L, A_R.\,b + a.\,B_R - A_R.\,B_R$$

$$|A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R, A_R.\,b + a.\,B_L - A_R.\,B_L\}.\,c$$

Por lo tanto, al expandir a la expresión:

$$(a\ .b).\,c=\{(A_L.\,b + a.\,B_L - A_L.\,B_L)\ .c + ab.\,C_L - (A_L.\,b + a.\,B_L - A_L.\,C_L,$$

$$(A_R.\,b + a.\,B_R - A_R.\,B_R)\ .c + ab.\,C_L - (A_R.\,b + a.\,B_R - A_R.\,B_R).\,C_L,$$

$$(A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R).\,c + ab.\,C_R - (A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R).\,C_R,$$

$$(A_R.\,b + a.\,B_L - A_R.\,B_L).\,c + ab.\,C_R - (A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R).\,C_R\ |$$

$$(A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R).\,c + ab.\,C_R - (A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R).\,C_R,$$

$$(A_R.\,b + a.\,B_L - A_R.\,B_L).\,c + ab.\,C_R - (A_R.\,b + a.\,B_L - A_R.\,B_L).\,C_R,$$

$$(A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R).\,c + ab.\,C_L - (A_L.\,b + a.\,B_R - A_L.\,B_R).\,C_L,$$

$$(A_R.\,b + a.\,B_L - A_R.\,B_L).\,c + ab.\,C_L - (A_R.\,b + a.\,B_L - A_R.\,B_L).\,C_L\}$$

Esta sería la expresión completa de $(a.\,b).\,c$. A continuación, los elementos c y C_L se distribuyen al primer y tercer término respectivamente de cada elemento de los conjuntos $[(A.\,B).\,C\,]_L$ y $[(A.\,B).\,C\,]_R$.

$$a.b\ .c = \{A_L.bc + ac.B_L - c.A_LB_L + \ ab.C_L - A_LC_L.b - a.B_LC_L + A_L.B_L.C_L,$$

$$A_R.bc + ac.B_R - c.A_RB_R + \ ab.C_L - A_RC_L.b - a.B_RC_L + A_R.B_R.C_L,$$

$$A_L.bc + ac.B_R - c.A_LB_R + \ ab.C_R - A_LC_R.b - a.B_RC_L + A_L.B_R.C_R,$$

$$A_R.bc + ac.B_L - c.A_RB_L + \ ab.C_R - A_RC_R.b - a.B_LC_R + A_R.B_L.C_R\ |$$

$$A_L.bc + ac.B_R - c.A_LB_R + \ ab.C_R - A_LC_R.b - a.B_RC_R + A_L.B_R.C_R,$$

$$A_R.bc + ac.B_L - c.A_RB_L + \ ab.C_R - A_RC_R.b - a.B_LC_R + A_R.B_L.C_R,$$

$$A_L.bc + ac.B_R - c.A_LB_R + \ ab.C_L - A_LC_L.b - a.B_RC_L + A_L.B_R.C_L,$$

$$A_L.bc + ac.B_R - c.A_LB_R + \ ab.C_R - A_LC_R.b - a.B_RC_R + A_L.B_R.C_R,\}$$

Al expandir esta expresión, se puede factorizar a, A_L y A_R de los elementos de los conjuntos $[(A.B).C]_L$ y $[(A.B).C]_R$. De modo que:

$$(a.b).c = \{(B_L.c - C_R.b - C_L.B_L).a + \ bc.A_L - (c.B_R - b.C_L - C_L.B_R).A_L,$$

$$(C_R.b + c.B_R - C_R.B_R).a + ab.A_L - (C_R.b + c.B_R - C_R.B_R).A_L,$$

$$(C_L.b + c.B_R - C_L.B_R).a + ab.A_R - (C_L.b + C.B_R - C_L.B_R).A_R,$$

$$(C_R.b + c.B_L - C_R.B_L)\ .a + ab.A_R - (\ C_R.b + c.B_L - C_R.B_L).A_R|$$

$$(C_L.b + c.B_R - C_L.B_R).a + ab.A_R - (C_L.b + c.B_R - C_L.B_R).A_R,$$

$$(C_R.b + c.B_L - C_R.B_L).a + ab.A_R - (C_R.b + c.B_L - C_R.B_L).A_R,$$

$$(C_L.b + c.B_R - C_L.B_R).a + ab.A_L - (C_L.b + c.B_R - C_L.B_R).A_L,$$

$$(C_R.b + c.B_L - C_R.B_L).a + ab.A_L - (C_R.b + c.B_L - C_R.B_L).A_L\}.$$

Nótese que al haber factorizado los conjuntos de a, la ecuación se puede rescribir de forma que:

$$(a.b).c = \ \{C_L.b + c.B_L - C_L.B_L, C_R.b + c.B_R - C_R.B_R$$

$$|C_L.b + c.B_R - C_L.B_R, C_R.b + c.B_L - C_R.B_L\}.$$

$$\therefore (a.\,b).\,c = a.(b\ .\,c)$$

De esta forma se ha demostrado que el producto es asociativo en **No**. Esto es así, pues se puede factorizar la expansión de $(a.\,b).\,c$, y es posible expresarla como $a.(b\ .\,c)$. La propiedad asociativa del producto es la misma que está definida en $\mathbb{Z}$, **No** se ha construido hasta este punto de modo que, la adición y algunas propiedades del producto sean análogos.

3.8. El producto es distributivo respecto de la adición

Teorema 13: $\forall a, b, c \in \mathbf{No} \Rightarrow a.(b+c)=ab+ac$

Demostración: La expresión $a.(b+c)$, se puede expresar de la manera:

$$a.(b+c)= a.\{B_L+c,\ C_L+b|B_R+c,\ C_R+b\}$$

Expandiendo la ecuación, tendríamos que:

$$a.(b+c)=\{A_L.(b+c)+a.(B_L+c)-A_L.(B_L+c),$$

$$A_L.(b+c)+a.(C_L+b)-A_L.(C_L+b),$$

$$A_R.(b+c)+a.(B_R+c)-A_R.(B_R+c),$$

$$A_R.(b+c)+a.(C_R+b)-A_R.(C_R+b)|$$

$$A_L.(b+c)+a.(B_R+c)-A_L.(B_R+c),$$

$$A_L.(b+c)+a.(C_R+b)-A_L.(C_R+b),$$

$$A_R.(b+c)+a.(B_L+c)-A_R.(B_L+c),$$

$$A_R.(b+c)+a.(C_L+b)-A_R.(C_L+b)\}$$

Esta expresión se puede volver a expandir, esta resultaría en:

$$a.(b+c)= \ \{A_L.\,b+A_L.\,c+a.\,B_L+ac-A_L.\,B_L-A_L.\,c,$$

$$A_L.\,b+A_L.\,c+a.\,C_L+ab-A_L.\,C_L-A_L.\,b,$$

$$A_R.\,b+A_R.\,c+a.\,B_L+ac-A_L.\,B_L-A_L.\,b,$$

$$A_R.\,b+A_R.\,c+a.\,C_R+ab-A_R.\,C_R-A_R.\,b,|$$

$$A_L.\,b+A_L.\,c+a.\,B_R+ac-A_L.\,B_R-A_L.\,c,$$

$$A_L.\,b+A_L.\,c+a.\,C_R+ab-A_L.\,C_R-A_L.\,b,$$

$$A_R.\,b+A_R.\,c+a.\,B_L+ac-A_R.\,B_L-A_R.\,c,$$

$$A_R.\,b+A_R.\,c+a.\,C_L+ab-A_R.\,C_L-A_R.\,b\}.$$

Se pueden factorizar las expresiones $a.\,c$ y $a.\,b$, de modo que:

$$a.(b+c)=\{(a.\,B_L+A_L.\,b-A_L.\,B_L)+ac,$$

$$(a.\,C_L+A_L.\,c-A_L.\,C_L)\ +ab,$$

$$(a.\,B_R+A_R.\,b-A_R.\,B_R)+ac,$$

$$(a.\,C_R+A_R.\,c-A_R.\,C_R)+ab|$$

$$(b.\,A_L+B_R.\,a-A_L.\,B_R)\ +ac,$$

$$(c.\,A_L+C_R.\,a-A_L.\,C_R)+ab,$$

$$(b.\,A_R+B_L.\,a-A_R.\,B_L)+ac,$$

$$(c.\,A_R+C_L.\,a-A_R.\,C_L)+ab\}.$$

Nótese, que los elementos de $[A.(B+C)]_L$ están en expresión de suma. Como ejemplo, la expresión $(a.\,B_L+A_L.\,b-A_L.\,B_L)$ es parte del conjunto $(A.\,B)_L$ de ab. Según la definición de adición, $a+b=\{A_L+b,\ B_L+a|A_R+b,\ B_R+a\}$. Al conjunto izquierdo $(A.\,B)_L$ se le debe sumar el otro número, que en la primera inecuación es ac. De esta forma se determina un elemento de $[A.(B+C)]_L$. Se puede plasmar que:

$$(a.\,B_L+A_L.\,b-A_L.\,B_L)+ac<\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}<(b.\,A_L+B_R.\,a-A_L.\,B_R)+ac$$

$$(a.\,B_R+A_R.\,b-A_R.\,B_R)+ac<\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}<(b.\,A_R+B_L.\,a-A_R.\,B_L)+ac$$

$$(a.\,C_L+A_L.\,c-A_L.\,C_L)+ab<\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ab}<(c.\,A_L+C_R.\,a-A_L.\,C_R)+ab$$

$$(a.\,C_R+A_R.\,c-A_R.\,C_R)+ab<\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ab}<(c.\,A_R+C_L.\,a-A_R.\,C_L)+ab.$$

Por lo tanto, se puede afirmar que:

$$a.(b+c)=ab+ac.$$

Demostrar la propiedad distributiva para $b+c\ .\,a=b.\,a+c.\,a$, sería tedioso. En su lugar, se demostrará la propiedad conmutativa en el siguiente punto, de modo que la proposición anterior se demuestre por consecuencia. Nótese que la relación entre la adición y el producto ocurre de la misma forma que en $\mathbb{Z}$.

3.9. El producto es conmutativo

Teorema 14: $\forall a, b \in \mathbf{No} \Rightarrow a.\, b = b.\, a$

Demostración: Como ya se había plasmado anteriormente, $a.\, b$, y por consiguiente $b.\, a$, se puede expresar de la siguiente manera:

$$a.\, b = \{A_L.\, b + a.\, B_L - A_L.\, B_L, A_R.\, b + a.\, B_R - A_R.\, B_R \\ |A_L.\, b + a.\, B_R - A_L.\, B_R, A_R.\, b + a.\, B_L - A_R.\, B_L\}$$

$$b.\, a = \{B_L.\, a + b.\, A_L - B_L.\, A_L, B_R.\, a + b.\, A_R - B_R.\, A_R \\ |B_L.\, a + b.\, A_R - B_L.\, A_R, B_R.\, a + b.\, A_L - B_R.\, A_L\}.$$

No es difícil darse cuenta de que las operaciones de los elementos de cada conjunto izquierdo y derecho son igualess, $\therefore a.\, b = b.\, a$. Por lo tanto, hasta el momento se puede decir que **No** es un ***anillo conmutativo***.

Corolario 3: $\forall a, b, c \in \mathbf{No} \Rightarrow a.(b + c) = (b + c).\, a$

La conmutatividad de las operaciones supone la igualdad $a.(b + c) = (b + c).\, a$ que se da análogamente en $\mathbb{Z}$. Ahora solo resta que un elemento neutro este definido en **No,** y se lo pueda considerar un ***anillo unitario conmutativo***, lo que lo haría idéntico algebraicamente a los enteros.

3.10. El producto tiene elemento neutro

Teorema 15: Si $a.\, b = a$. Entonces b es un elemento neutro en **No** para la multiplicación.

Demostración: Se conoce que la expresión para ab es:

$$ab = \{A_L.\, b + a.\, B_L - A_L.\, B_L, A_R.\, b + a.\, B_R - A_R.\, B_R$$

$$|A_L.\, b + a.\, B_R - A_L.\, B_R, A_R.\, b + a.\, B_L - A_R.\, B_L\}.$$

Para determinar la existencia de un elemento neutro, se planteará una igualdad para el primer elemento del conjunto $(A.\, B)_L$:

$$A_L.\, b + a.\, B_L - A_L.\, B_L = A_L.$$

Esto puede factorizarse de la forma:

$$B_L.(a - A_L) + A_L.\, b = A_L$$

Para que esta igualdad se mantenga, así deben hacerlo las siguientes:

$$A_L.\, b = A_L$$

$$B_L.(\ a - A_L) = 0.$$

En la primera igualdad, la única alternativa posible es que $b = 1$. De la misma forma, para el segundo caso, la alternativa concordante es $b = 1$, pues este se había definido de la manera $1 = \{0|\emptyset\}$, donde el conjunto 1_L es 0, y por ley distributiva, así lo es también la segunda ecuación. Se demuestra que 1 es el elemento neutro de la expresando

$$a.\, 1 = \{A_L.\, 1 + a.\, 0 - A_L.\, 0, A_R.\, 1 + a.\, \emptyset - A_R.\, \emptyset$$

$$|A_L.\, 1 + a.\, \emptyset - A_L.\, \emptyset, A_R.\, 1 + a.\, 0 - A_R.\, 0\}.$$

$$\therefore a.\, 1 = \{A_L|A_R\}.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que **No** es un ***anillo unitario conmutativo***. Por tanto, ya se puede afirmar que, los números surreales y los enteros poseen una estructura algebraicamente idéntica.

4. Conclusiones

En el trabajo, se definió la adición en **No** y se demostró: su clausura, asociatividad, la existencia de neutro, existencia de inverso y la conmutatividad. Igualmente, se definió el producto: su propiedad de clausura, asociatividad, y distributividad con respecto a la adición. Entonces, se demostró que **No** tiene ***estructura de anillo***, y puede expresarse como $(\mathbf{No}, +, \cdot)$. Luego, se demostró la existencia de neutro y la conmutatividad en el producto, definiendo a **No** como ***anillo unitario conmutativo,*** respondiendo a la pregunta de investigación.

Sería interesante demostrar nuevas propiedades del producto, como la existencia de un inverso multiplicativo. A su vez, se ha determinado que el elemento neutro de la adición es $0 = \{\emptyset|\emptyset\}$ y que para la multiplicación es $1 = \{0|\emptyset\}$. No obstante, todavía cabe la pregunta de que si 0 seguirá siendo el elemento neutro en la adición si se presenta en forma de $n = \{N_L|N_R\} \equiv \{\emptyset|\emptyset\} = 0$. Esto también aplicaría, para cualquier $x = \{X_L|X_R\} \equiv \{0|\emptyset\} = 1$, en el producto.

Además, es sugerente la definición del concepto de limite en función de cantidades infinitesimales como ε. Definir el límite introduciría análisis matemático de funciones dentro de **No.** Supondría entonces la definición formal de derivada y por consiguiente la de integrales (antiderivadas). Me parece realmente interesante como el sistema se han desarrollado de forma que se pueda teorizar sobre implementar conceptos del cálculo a **No**. Se pretende la continuación de la investigación sobre los **No**, pues el tema realmente ha sido de mi interés y todavía resta áreas en las que poder desarrollar el sistema.

Una limitación fue la dificultad de la comprensión de escritos sobre álgebra abstracta y los métodos para de demostración lógicos. La lectura supuso un gran reto que, con el tiempo dedicado al estudio, logró sobrellevarse. Otra limitación fue la escasa bibliografía que existe referente al tema. No pude encontrar una basta cantidad de referencias. En ese sentido, me centré en las pocas fuentes que pude recolectar para cumplir el objetivo del trabajo.

Referencias

Almanza, J. A., Duro, N. D., José, J. F., Jiménez, J. J., & Morilla, F. M. (2010). *Fundamentos de Lógica Matemática y Computación*. Madrid: Sanz y Torres.

Ayres, F., Castaño, J. & Robledo Moncada, E., (1975). *Algebra Moderna*. México: McGraw-Hill.

Burgos, A., (1978). *Iniciación A La Matemática Moderna.* Madrid: Selecciones Científicas.

Castañeda, J. A. C., Gómez, B. A., Humánez, P. B. A., Primitivo, A. H., & Academia Colombiana de Ciencias Exactas, F. y N. (2013). *Algebra*. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Grimm, G. (2012). *An Introduction to Surreal Numbers*. Recuperado de https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/Grimm.pdf.

Venero, A. (1995). *Introducción al Análisis Matemático* (Revisada ed.). Lima: Gemar.,